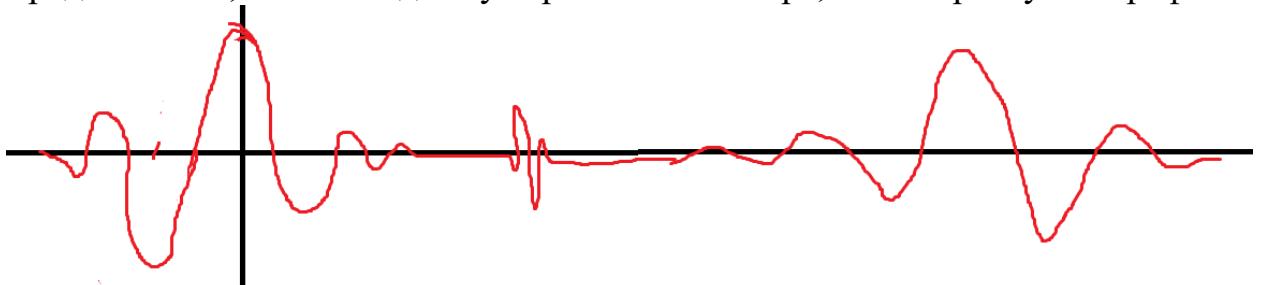


109. Что такое вейвлет-анализ? Для чего он применяется?
110. Почему функции Хаара, функции Литлвуда-Пелли и функции Габора не используются в качестве базисных функций в вейвлет-анализе?
111. Что такое материнский (анализирующий) вейвлет?
112. Перечислите основные свойства функций вейвлет-семейства.
113. В чём состоит преимущество вейвлет-преобразования перед фурье-преобразованием?
114. Приведите примеры применения вейвлет-анализа.

Изначально «вейвлет-анализ» назывался «всплеск-анализом», и это неслучайно. Слово «всплеск» запомните, оно нам ещё попадётся.

Предположим, что вы сидите у экране компьютера, на котором у вас график



Задача, стоящая перед вами: разложить по частотам.

Попытка один: у нас тут какая-то функция, тупо запихнуть в Фурье. Однако, присмотревшись к графику, в обратите внимание, что он представляет набор всплесков – сигналов на разных частотах, причём явно локализованных по координате. Вот самый высокочастотный расположился в центре, например. Т.е. по виду здесь три частоты: частота левого всплеска, частота центрального всплеска и частота правого всплеска.

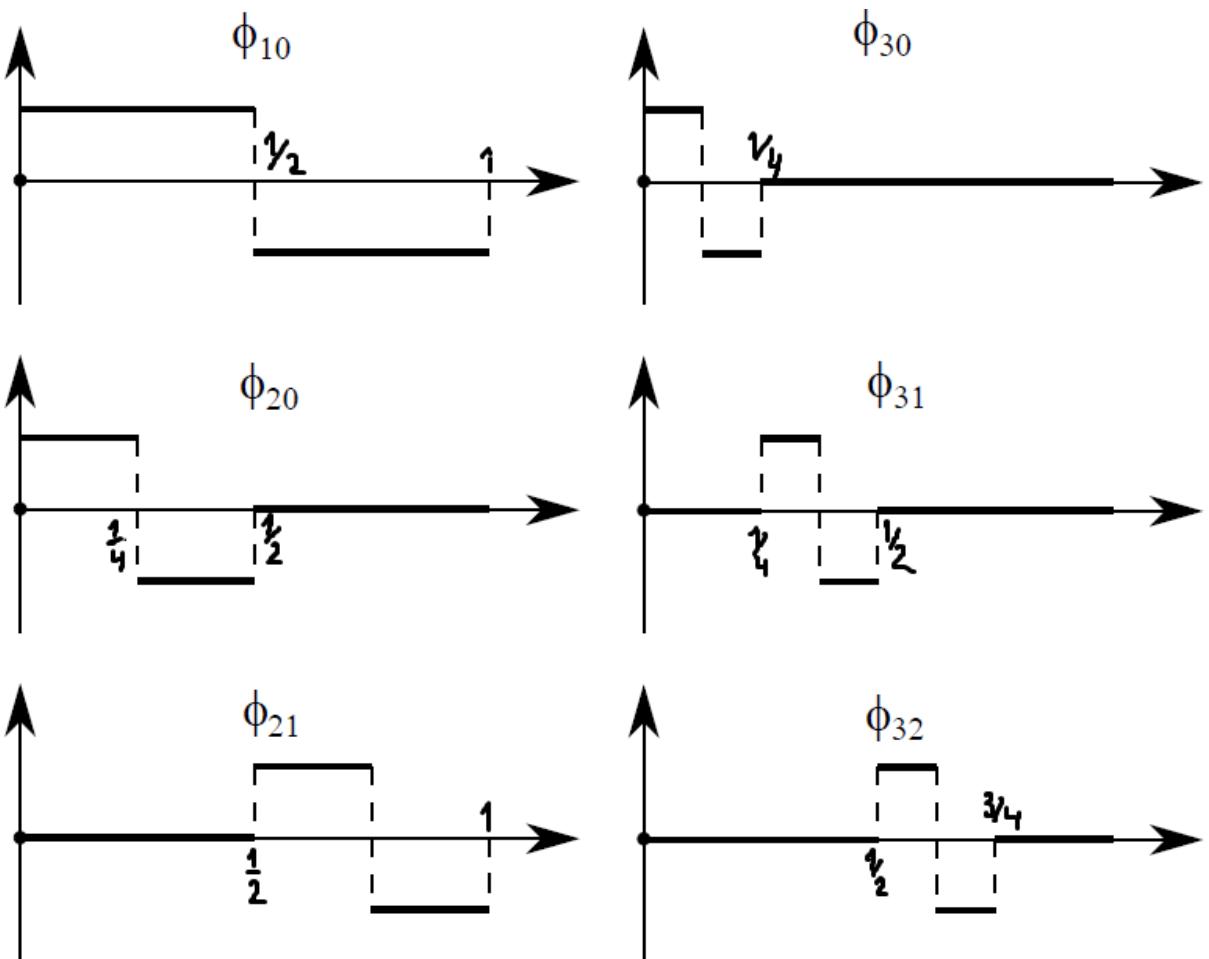
Можно сказать, что у нас функция по внешнему виду смахивает на нечто в духе

$$y(x)=C_1 \exp(-(x-x_1)^2/2\sigma_1^2) \cos(\omega_1 x + \phi_1) + C_2 \exp(-(x-x_2)^2/2\sigma_2^2) \cos(\omega_2 x + \phi_2) + C_3 \exp(-(x-x_3)^2/2\sigma_3^2) \cos(\omega_3 x + \phi_3).$$

Кстати, ещё одно место, где вы можете видеть подобную функцию – ЭКГ 😊 В Фурье же мы раскладываем по синусам и косинусам, где ничего про локализацию нет! В итоге частоты, которые мы получим по Фурье, вообще не факт, что будут иметь хоть что-то общее с  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

В итоге мы приходим к выводу, что для таких сигналов, состоящих из отдельных импульсов, раскладывать по синусам и косинусам – не лучший вариант.

А по какой же системе функций раскладывать? Тут матмодельщики постарались и придумали 100500 систем функций. Мы рассмотрим лишь одну возможную систему функций, но зато подробно – систему функций Харра.



Как вы заметили, каждая функция содержит в себе два индекса, и это неслучайно: первый кодирует частоту, второй место «всплеска».

Вася Пупкин, поработавший с вашим сигналом, сообщил, что в нём преобладают  $\phi_{50, 26}$ ,  $\phi_{50, 27}$ ,  $\phi_{50, 28}$  и  $\phi_{79, 131}$ ,  $\phi_{80, 131}$ . Сможете что-нибудь сказать о сигнале?

Да. Где-то на оси абсцисс в районе 27/50 находится всплеск на частоте 50. Также всплеск есть в районе 131/79,5, на частоте 79..80 Гц.

Вы, конечно, ждёте, что я скажу, что функции Харра являются вейвлетами. Я тоже так думал, однако, как оказалось, именно терминами «вейвлет» называется не любая система функций. Какие же должны быть требования?

Давайте я процитирую Боголюбова, а потом дам комментарии:  
(у Боголюбова аргумент  $t$ , у меня  $x$ , это ничего не меняет)

1) **Допустимость.** Анализирующий вейвлет  $\psi(t)$ , называемый также **материнским вейвлетом**, должен иметь нулевое среднее значение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (851)$$

2) **Подобие.** Все функции семейства получаются из анализирующего вейвлета путем масштабного преобразования и сдвига:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (852)$$

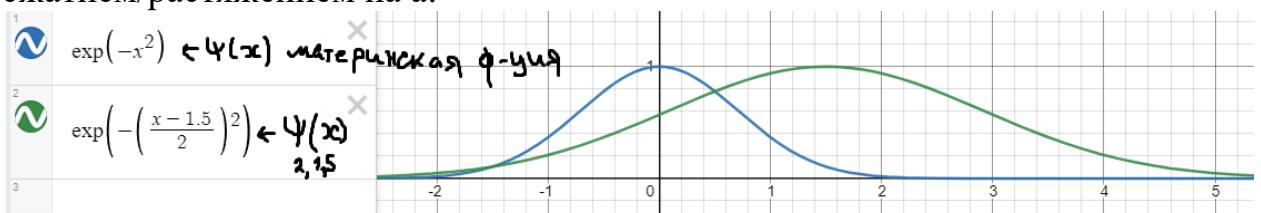
Получается двухпараметрическое семейство функций: параметр – масштаб (растяжение) функции, параметр  $b$  – положение (сдвиг) функции.

3) **Обратимость.** Существование обратного преобразования, однозначно восстанавливающее исходную функцию по ее вейвлет – преобразованию.

4) **Регулярность.** Функция  $\psi(t)$  должна быть хорошо локализована и в физическом пространстве, и в пространстве Фурье.

У каждой системе вейвлетов должен быть свой Адам, откуда они начинают свой род – некая функция  $\Psi(t)$ . **Она называется материнской или анализирующей.** Это должно быть что-то в духе  $1/(1+x^2)$  или  $\exp(-x^2)$  – хорошо локализованное и по краям быстро затухающее (это как раз требование регулярности – при уходе на бесконечность стремись, плиз, к нулю). Ну и обе функции, которые я привёл, чётные. В идеале надо брать чётные, если не получается чётные – ну хоть со средним значением в нуле (это как раз первое условие, допустимости).

Все остальные вейвлеты получаются из Адама сдвигом на  $b$  и сжатием/растяжением на  $a$ .

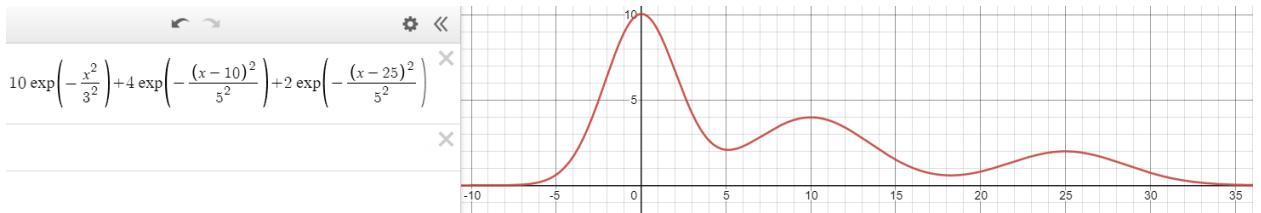


Система вейвлетов всегда двухпараметрическая! Если вам в переходе продавец вместе с Айфоном за 5 тысяч предлагает трёхпараметрическую систему вейвлетом, это всё обман!

Ну и видно, что система функций Харра этим требованиям не удовлетворяет. А какая удовлетворяет? Например, из вот такого Адама  $\Phi(x)=\exp(-x^2)$

Получится неплохое человечество:  
 $\Phi_{a,b}(x)=\Phi((x-b)/a)=\exp(-(x-b)^2/a^2)$

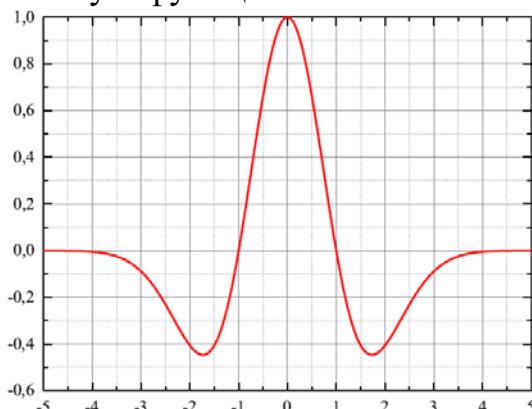
Эта система вейвлетов неплохо пригодится для описания такого горного пейзажа:



Однако плохо пригодится для описания ЭКГ, где в каждом всплеске ещё содержатся и колебания: меняя параметры  $a$  и  $b$ , мы можем менять расположение горы и её ширину, но вот колебания вызвать не можем.

Чуть лучше для неё (ЭКГ) будет система вейвлетов, порождённая  $\Phi(x)=(1-x^2)*\exp(-x^2)$

Боголюбов такую функцию называет «мексиканской шляпой» из-за её



графика:

На графике мы видим, что у нас не просто гора, а всплеск с колебаниями, что позволяет нам подобными вейвлетами описывать ЭКГ.

А как выглядит Вейвлет-преобразование? Да очень похоже на Фурье-преобразование:

$$W(a, b) = a^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt,$$

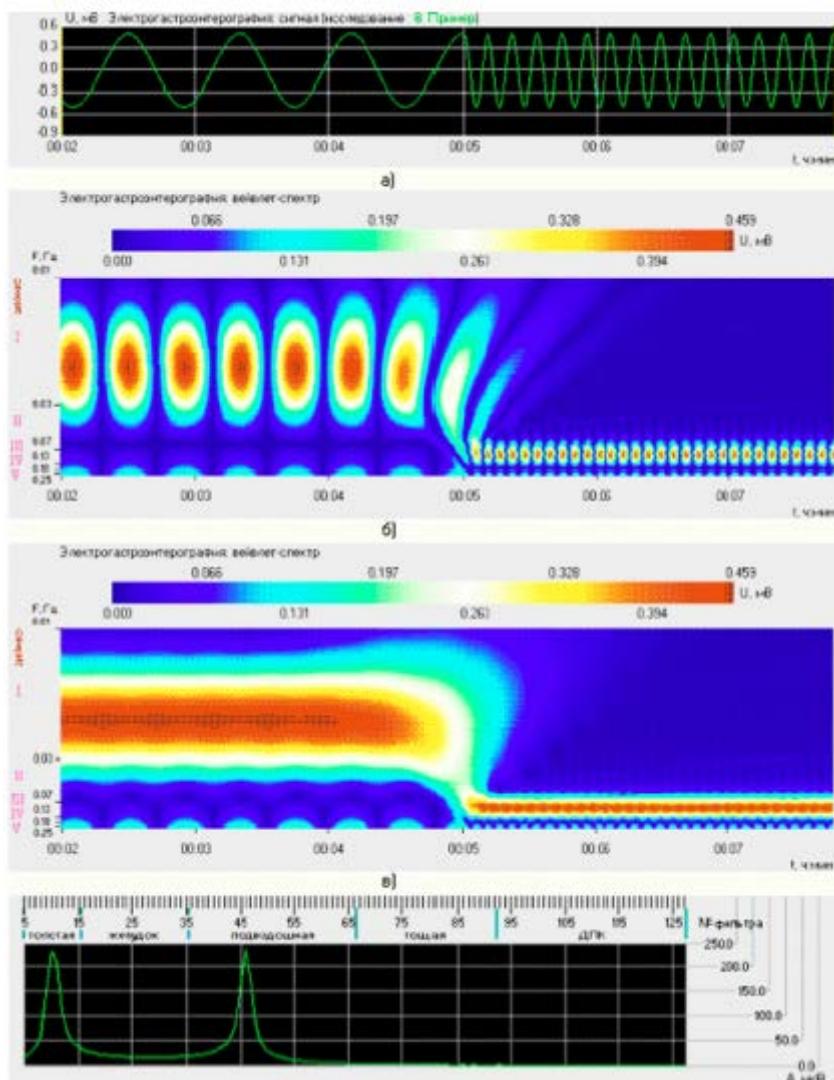
$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) W(a, b) \frac{da db}{a^{3+k}}.$$

Константы  $C_\psi$  и  $k$  подбираются индивидуально для каждой материнской функции  $\Psi()$ .

Напоследок я хочу пояснить смысл фразы Боголюбова:

Преимущество вейвлет – преобразования перед преобразованием Фурье состоит в том, что оно позволяет проследить за изменением спектральных свойств сигнала со временем и указать, какие частоты (масштабы) доминируют в сигнале.

Вот вы представьте себе, что у вас лежит пациент, а вы смотрите его кардиограмму.



В момент времени 00:05 вы говорите ему «А ты знаешь, что в следующем (шестом) семестре у тебя ядерные праки с Евгением Вадимовичем?» (в этот момент вся 312-я группа расплакалась, у нас они вроде правда будут). Всё, пульс резко скакнул (что и мы видим на графике сверху).

Сделали скриншот, отправили график в Фурье. Он нам ожидаемо выдал два пика. Что понятно по этим двум пикам? Да ничего: то ли у пациента два сердца на разных частотах, то ли он, наоборот, успокоился...

А теперь посмотрим на любой из двух графиков с помощью вейвлетов. На обоих видно: в 00:05 что-то произошло! Вот это «изменение спектральных свойств со временем» и имел в виду Боголюбов.